UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

REZUMAT

TEZA DE DOCTOR

---

# Detection and Open System Dynamics of Gaussian Quantum Correlations

# Detectarea și Dinamica în Sisteme Deschise a Corelațiilor Cuantice Gaussiene

---


*Autor:*
Tatiana MIHĂESCU

*Coordonator științific:*
Prof. Dr. Aurelian ISAR


Școala Doctorală de Fizică

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

# *Abstract*

**Detection and Open System Dynamics of Gaussian Quantum Correlations**

**Detectarea și Dinamica în Sisteme Deschise a Corelațiilor Cuantice Gaussiene**

Tatiana MIHĂESCU

În această teză este abordat subiectul corelațiilor cuantice, cum sunt entanglementul, steeringul și discordul, în sisteme de variabile continue. În special, stările gaussiene îndeplinesc condițiile experimentale des întâlnite în optica cuantică, iar formalismul lor implică și o descriere matematică simplificată.

Entanglementul este una dintre cele mai importante caracteristici ale mecanicii cuantice, iar multe dintre criteriile existenței entanglementului necesită cunoașterea completă a stării gaussiene, ceea ce poate reprezenta o condiție costisitoare și neeficientă. Noi prezentăm o metodă inovatoare pentru detecterea entanglementului in stări gaussiene generice, ce constă în implementarea operatorilor-test care se bazează pe momente statistice de ordinul doi și care necesită în medie mai puține măsurători în comparație cu tomografia completă, care se utilizează pentru reconstruirea totală a sistemului studiat. În plus, o metodă similară se aplică pentru detectarea steeringului cuantic în stări gaussiene, și noi definim și caracterizăm în totalitate setul de teste de steering compuse din momente cuadratice. Pentru testarea fezabilității acestei metode, sunt realizate simulări ale detectării entanglementului și steeringului în stări gaussiene aleatorii, care demonstrează o bună reziliență a metodei la erorile statistice.

Un factor important care afectează în mod deosebit progresul tehnologiilor cuantice este dat de distrugerea corelațiilor cuntice, datorată decoerenței produse în sistem de mediul înconjurător. În cadrul teoriei sistemelor cuantice deschise bazate pe semigrupuri dinamice complet pozitive, evoluția markoviană este reprezentată de generatorul lindbladian al dinamicii. Este rezolvată ecuația master Lindblad pentru un sistem gaussian bipartit în interacție cu un rezervor termic și un rezervor termic comprimat. Evoluția globală rezultă ca efect al competiției dintre parametrii caracteristici ai băii (temperatura și disiparea), ai stării inițiale (comprimarea și numerele fotonice termice) și cuplajul dintre modurile sistemului considerat. În cazul modurilor necuplate entanglementul și steeringul au un comportament tipic de distrugere subită în timp finit, pe cand corelațiile de tip discord se anulează asimptotic la timp infinit. Totuși, dacă modurile sunt cuplate este posibilă chiar generarea de discord gaussian pentru o stare inițială ce conține doar corelații clasice, și discordul are o valoare finită diferită de zero în limita asimptotică.

De asemenea, este studiată evoluția ratei producției de entropie, ce reprezintă un indicator al ireversibilității generate de interacția a două moduri bosonice cu un mediu termic, și care are o valoare pozitivă în orice moment de timp pentru dinamica markoviană. Ireversibilitatea este mai mare în cazul unei asimetrii a sistemului, cum este comprimarea în incertitudinile cuadraturilor, și pentru frecvențe nerezonante, precum și în cazul modurilor bosonice cuplate.

# Lista de Publicații


1. Isar, A. and Mihaescu, T. “Generation of quantum discord in two-mode Gaussian systems in a thermal reservoir”. In: *The European Physical Journal D* 71.6 (2017). ISSN: 1434-6079. DOI: 10.1140/epjd/e2017-80011-4.
2. Mihaescu, T. and Isar, A. “Gaussian Quantum Steering of Two Bosonic Modes in a Thermal Environment”. In: *Romanian Journal of Physics* 62.107 (2017).
3. Mihaescu, T. and Isar, A. “Evolution of quantum steering in a Gaussian noisy channel”. In: *The European Physical Journal D* 72.6 (2018). ISSN: 1434-6079. DOI: 10.1140/epjd/e2018-90068-0.
4. Mihaescu, T. and Isar, A. “Dynamics of Entropy Production Rate in Two Coupled Bosonic Modes Interacting with a Thermal Reservoir”. In: *Entropy* 24.5 (2022). ISSN: 1099-4300. DOI: 10.3390/e24050696. URL: https://www.mdpi.com/1099-4300/24/5/696.
5. Mihaescu, T., Kampermann, H., Gianfelici, G., Isar, A., and Bruß, D. “Detecting entanglement of unknown continuous variable states with random measurements”. In: *New Journal of Physics* 22.12 (2020). DOI: 10.1088/1367-2630/abd1ad.
6. Mihaescu, T., Kampermann, H., Bruß, D., and Isar, A. “Steering witnesses for unknown Gaussian quantum states”. In: (2023). URL: https://arxiv.org/abs/2304.11239.
7. Mîrzac, A., Mihaescu, T., Macovei, M., and Isar, A. “Interferometric power of Gaussian systems in a squeezed thermal bath”. In: *Romanian Journal of Physics* 65.102 (2020).

# Contents

# Introducere

Principiul nelocalității reprezintă o particularitate esențială a mecanicii cuantice, care a fost pus în evidență de faimosul paradox al lui Einstein, Podolski și Rosen (EPR) [EPR35]. În ultimul secol paradoxul EPR a fost formalizat într-o ierarhie de corelații nelocale cu o clasificare distinctă, cum sunt entanglementul, steeringul și nelocalitatea Bell. În prezent aceste corelații sunt esențiale pentru tehnologii inspirate de știința informației cuantice, precum calculul cuantic, comunicarea cuantică și criptografia cuantică [Hor+09] [Uol+20] [Bru+14]. Mai mult decât atât, știința informației cuantice a primit recunoaștere mondială prin decernarea Premiului Nobel în fizică lui Alain Aspect, John F. Clauser și Anton Zeilinger *"for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"*[1].

Există multe aspecte ale lumii cuantice în sisteme compuse, iar incercarea neobosită a fizicenilor din ultimul secol de a înțelege trăsăturile cuantice le-a permis să definească o distincție mai clară dintre corelațiile clasice și cuantice decât entanglementul. Aceastea sunt date de corelațiile de tip discord, care reprezintă transpunerea noțiunilor clasice de informație și ignoranță despre o stare fizică în domeniul cuantic [OZ01]. Printre multe alte aplicații corelațiile de tip discord sunt utile în domeniul de cercetare de înaltă precizie, denumit metrologie cuantică [Mod+11].

Investigarea corelațiilor cuantice în stările sistemelor de variabile continue, caracterizate de sisteme cuantice infinit dimensionale, cum sunt modurile de lumină sau oscilatorii armonici, reprezintă o abordare extrem de influentă pentru știința informației cuantice. Printre altele, stările gaussiene au o importanță practică deosebită, fiind des întâlnite în experimentele de optică cuantică și având o descriere matematică care evită aspectele tehnice solicitante ale spațiilor Hilbert infinit dimensionale [Wee+12]. În particular, stările gaussiene sunt definite de vectorul de translație și matricea de covarianță de dimensiune finită, în timp ce orice posibilă corelație cuantică a stării este conținută în matricea de covarianță. Studiul stărilor generale de dimensiuni infinite prin prisma științei informației cuantice este mult mai complicat decât pentru sisteme cu nivele discrete, de exemplu qubiți, însă pentru stările gaussiene pot fi deduse chiar unele afirmații generice despre entanglement, precum și despre steeringul cuantic și corelațiile de tip discord, ceea ce reprezintă unul dintre scopurile acestei teze.

Începând cu controversatul paradox EPR s-a încercat înțelegerea proprietăților entanglementului, unul dintre scopuri fiind de a răspunde la întrebarea dacă o stare generică dată este entanglată sau separabilă, și de a defini o măsură sigură de cuantificare a entanglementului. În cazul general această problemă este încă fără răspuns, însă există metode precise de a detecta entanglementul bipartit în stări arbitrare. De obicei aceste criterii sunt utilizate dacă se consideră că starea cuantică investigată este complet cunoscută, adică ea este reconstruită în totalitate prin intervenția măsurătorilor ce formează un set tomografic complet. Această procedură poate fi foarte costisitoare și chiar excesivă în termeni de resurse necesare, dacă ne dorim să deducem doar informația despre o proprietate specifică a unei stări necunoscute, cum este entanglementul, în locul informației complete despre starea cuantică. Acest lucru conduce la întrebarea inevitabilă despre cât de greu aste în principiu să detectăm entanglementul într-o stare gaussiană arbitrară, din perspectiva numărului de măsurători necesar în acest scop.

În teză este abordată această problemă prin implementarea unui instrument util

[1] https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/

pentru detectarea entanglementului în timpul experimentelor, așa-numitele teste de entanglement, care reprezintă un criteriu bazat pe observabilele direct măsurate în experiment. Pentru stările gaussiene există o alternativă specială pentru testele de entanglement bazate pe varianțele operatorilor canonici [HE06]. Una dintre contribuțiile noastre majore este dată de definirea și caracterizarea completă a setului de teste bazate pe varianțe pentru detectarea steeringului, care de fapt reprezintă un subset al testelor de entanglement [Mih+23].

Concret, având o stare gaussiana arbitrară necunoscută propunerea noastră este să accesăm informația prin executarea de măsurători aleatorii, care servesc ca bază pentru construirea de teste pentru entanglement și steering. Ulterior, dezvoltăm un algoritm semidefinit de optimizare capabil să găsească testul adecvat bazat pe datele experimentale obținute. În acest scop propunem și un nou set de constrângeri liniare pentru testele de entanglement și steering, respectiv, care caracterizează complet, și în general restrâng, setul de teste pentru stări gaussiene de două moduri [Mih+20] [Mih+23]. Ca rezultat, această metodă nouă ne permite să detectăm entanglementul și steeringul în stări gaussiene aleatorii în medie cu mai puține măsurători decât în tomografia completă. Pe lângă aceasta, metoda propusă este robustă la erorile statistice.

O altă problemă importantă în cadrul teoriei cuantice o constituie faptul că sistemele cuantice sunt afectate de mediul exterior. Prin urmare, pentru a obține o bună descriere a evoluției unui sistem cuantic este necesar să considerăm și influența mediului înconjurător. În cadrul teoriei sistemelor deschise bazate pe semigrupuri dinamice complet pozitive, ecuația master Lindblad reprezintă cea mai generală formă a dinamicii markoviene, care este în mod obișnuit întâlnită în numeroase situații experimentale. În acest tip de evoluție are loc un transfer continuu al informației de la sistem spre mediu, însă excitațiile mediului cauzate de sistem se alterează rapid, astfel încât informația nu revine înapoi în sistem.

Noi considerăm un sistem gaussian de două moduri bosonice în interacție cu o baie termică și o baie termică comprimată. În acest caz, evoluția descrisă de ecuația master Lindblad păstrează gaussianitatea stării inițiale în orice moment de timp. Noi rezolvăm ecuația master transcrisă în termeni de varianțe ale stării, în care este conținută informația completă despre corelațiile cuantice prezente în sistem. Astfel, începând cu o stare inițială gaussiană, cum este starea termică comprimată, observăm că entanglementul și steeringul se distrug în timp finit, datorită disipării și zgomotului termic [MI17], pe când corelațiile de tip discord sunt mai rezistente la zgomot, și se anulează doar asimptotic la timp infinit [Mîr+20]. Cu toate acestea, cuplajul inițial între moduri influențează puternic evoluția globală, mai exact discordul se conservă în orice moment de timp și tinde asimptotic către o valoare finită diferită de zero. În particular, se poate observa chiar crearea discordului în stări inițiale fără discord [IM17]. Pentru o baie termică comprimată există o competiție între comprimarea locală a stării și comprimarea băii, care conduce, într-un timp mai lung sau mai scurt, la distrugerea steeringului, în funcție și de faza de comprimare a rezervorului [MI18].

Evoluția unui sistem gaussian deschis este un proces ireversibil în orice moment de timp, până când sistemul ajunge în echilibru termic cu baia termică. Acest aspect este ilustrat prin descrierea evoluției în timp a ratei producției de entropie ca indicator al ireversibilității, și descriem evoluția acestuia în timp [MI22]. Ireversibilitatea este mai intensă la momentul inițial de timp pentru cazul când modurile bosonice sunt cuplate, sau dacă există o asimetrie în sistem, cum este comprimarea în incertitudinile cuadraturilor, sau dacă modurile bosonice nu sunt în rezonanță.

# Stări de variabile continue

În mecanica cuantică sistemele de variabile continue sunt definite ca sisteme având gradele de libertate cuantice asociate operatorilor cu spectru continuu real. Exemple de astfel de operatori sunt gradele de libertate de mișcare a particulelor nerelativiste, descrise de perechea de operatori autoadjuncți de poziție $\hat{x}$ și impuls $\hat{x}$, și cuadraturile asociate câmpului electric și magnetic de-a lungul direcției de polarizare a câmpului electromagnetic cuantic. Câmpul electromagnetic mai poate fi descris în termeni de oscilatori armonici cuantici necuplați, unde fiecare oscilator armonic reprezintă un mod de lumină în terminologia opticii cuantice, notat cu $k$, și se descrie într-un spațiu Hilbert de dimensiuni infinite $\mathcal{H}_k$. Astfel, un sistem compus din $N$ moduri bosonice este descris într-un spațiu Hilbert dat de $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k$. În formalismul mecanicii cuantice ce descrie sistemele de variabile continue, perechea de operatori autoadjuncți satisface relația de comutare canonică $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$. În particular, pentru un sistem de $N$ moduri se definește un vector de $2N$ operatori canonici autoadjuncți, $\hat{R} = (\hat{R}_1, ...\hat{R}_{2N})^{\mathrm{T}} = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, ..., \hat{x}_N, \hat{p}_N)^{\mathrm{T}}$, astfel încât relația de comutare canonică devine

$$[\hat{R}_k, \hat{R}_l] = \mathrm{i}\,\Omega_{kl}, \tag{2.1}$$

unde $\Omega_{kl} \equiv [\Omega]_{kl}$ sunt elementele unei matrici reale antisimetrice bloc diagonale $2N \times 2N$, numită *matricea simplectică*,

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^{N} \Omega_1, \quad \text{cu} \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

unde $\Omega_1$ denotă matricea simplectică pentru un singur mod cuantic. O formă echivalentă a relației de comutare în termeni de operatorii de creare $\hat{a}_k^\dagger$ și anihilare $\hat{a}_k$ a unui mod excitat $k$, este dată de

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}, \qquad [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_l^\dagger] = [\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0. \tag{2.3}$$

Hamiltonianul care descrie sistemul de $N$ bosoni liberi independenți este reprezentat ca suma de Hamiltonieni asociați fiecărui mod,

$$\hat{H} = \sum_{k}^{N} \hat{H}_k, \qquad \hat{H}_k = \omega_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}), \tag{2.4}$$

unde $\omega_k$ este frecvența modului $k$, și orice Hamiltonian de ordinul doi în termeni de operatori canonici (cuadratic) poate fi adus la această formă.

## 2.1 Transformări simplectice

Analogul operațiilor unitare în spațiul stărilor este dat de transformările simplectice care acționează pe vectorul de operatori canonici $\hat{R}' = S\hat{R}$, și care păstrează invariantă forma antisimetrică canonică a relației de comutare:

$$S\Omega S^{\mathrm{T}} = \Omega. \tag{2.5}$$

Aceste transformări au originea în mecanica clasică hamiltoniană, și reprezintă transformări liniare canonice. Faptul că hamiltonienii cuadratici (2.4) pot fi diagonalizati este echivalent cu diagonalizarea matricilor pozitiv definite prin intermediul transformărilor simplectice.

**Teoremă 2.1.** *[Forma Normală Williamson] [Wil36] Fie $M \geq 0$ o matrice $2N \times 2N$ pozitiv semidefinită. Atunci există o transformare simplectică $S$ (2.5) astfel încât*

$$SMS^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(s_1, s_1, \ldots, s_N, s_N), \tag{2.6}$$

*unde $s_1, \ldots s_N \geq 0$ sunt valorile proprii simplectice ale matricii $M$.*

Urma simplectică a unei matrici $M$, notată cu $\mathrm{str}[M]$, este dată de

$$\mathrm{str}[M] := \sum_{i=1}^{N} s_i, \tag{2.7}$$

și se definește ca suma valorilor proprii simplectice $s_i$ (2.6).

## 2.2 Stările gaussiene

Setul de stări gaussiene este definit de toate stările fundamentale și termice ale hamiltonienilor cuadratici (2.4)[Ser17]:

$$\hat{\rho}_G = \frac{\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}}}{\mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}}]}, \tag{2.8}$$

unde parametrul $\beta$ este notația folosită în termodinamică, fiind dată de constanta Boltzmann și inversa temperaturii. În spațiul fazelor, stările gaussiene sunt reprezentate de funcția caracteristică de forma gaussiană:

$$\chi_G(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\xi^{\mathrm{T}}\Omega^{\mathrm{T}}\gamma\;\Omega\;\xi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi^{\mathrm{T}}\Omega^{\mathrm{T}}d}, \tag{2.9}$$

unde $d = \mathrm{Tr}[\hat{R}\;\hat{\rho}_G] \in \mathbb{R}^{2N}$ este vectorul de translație, reprezentând momentul statistic de ordinul unu, și matricea simetrică $\gamma$ ce reprezintă momentele statistice de ordinul doi, numită matrice de covarianță, cu elementele

$$\gamma = \mathrm{Tr}[\{(\hat{R} - d), (\hat{R} - d)^{\mathrm{T}}\}\;\hat{\rho}_G], \tag{2.10}$$

unde $\{\hat{X}, \hat{Y}\} = \hat{X}\hat{Y} + \hat{Y}\hat{X}$ este anticomutatorul. Relația de incertitudine, care diferențiază stările gaussiene cuantice de cele clasice, este dată de

$$\gamma + \mathrm{i}\,\Omega \geq 0, \tag{2.11}$$

și reprezintă o condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice de covarianță $\gamma$ să reprezinte o stare gaussiană cuantică. Orice matrice de covarianță se obține aplicând o transformare simplectică pe matricea de covarianță a stării termice, definită ca $\gamma_{th} = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_1, \ldots, \nu_N, \nu_N)$, unde $\nu_k \geq 1$ reprezintă valorile proprii simplectice,

$$\gamma = S\Big(\bigoplus_{k=1}^{N} \nu_k \mathbb{I}_2\Big)S^{\mathrm{T}}. \tag{2.12}$$

Prin urmare, stările gaussiene sunt complet determinate de vectorul de translație și matricea de covarianță.

# Detectarea Entanglementului și Steeringului

Corelațiile cuantice în stările gaussiene sunt complet caracterizate de matricea de covarianță. Următoarele două criterii sunt necesare și suficiente pentru definirea separabilității și nesteerabilității bazate pe momente de ordinul doi, și care pun bazele pentru caracterizarea testelor de entanglement și steering.

**Teoremă 3.1.** *[Separabilitate] [WW01] Fie $\gamma$ o matrice de covarianță a stării $\hat{\rho}$ cu $N$ moduri bosonice, care este separabilă cu privire la partiția dintre Alice (A) și Bob (B), având $N_A$ și $N_B$ moduri, astfel încât $N_A + N_B = N$. Atunci există matrici de covarianță $\tau_A \geq \mathrm{i}\,\Omega_{N_A}$, $\tau_B \geq \mathrm{i}\,\Omega_{N_B}$ care corespund lui Alice și Bob, astfel încât*

$$\gamma \geq \tau_A \oplus \tau_B. \tag{3.1}$$

*Și invers, dacă această condiție este satisfăcută atunci starea gaussiană dată de matricea de covarianță $\gamma$ este separabilă.*

Acest criteriu de separabilitate pentru matricile de covarianță este bine știut, însă noi definim un criteriu similar pentru steering folosind măsurători gaussiene în Ref. [Mih+23].

**Teoremă 3.2.** *[Non-Steerabilitate] [Mih+23] Fie o stare cuantica gaussiană bipartită $\hat{\rho}$ cu $N$ moduri bosonice și matricea de covarianță $\gamma$, compusă din subsistemele lui Alice (A) și Bob (B), cu $N_A$ și $N_B$ moduri. Alice nu poate sa-l influențeze pe Bob (adică nu există steering) prin măsurători locale gaussiene dacă există o matrice de covarianță pentru starea lui Bob $\sigma_B \geq \mathrm{i}\,\Omega_{N_B}$ astfel încât*

$$\gamma \geq 0_A \oplus \sigma_B. \tag{3.2}$$

*Și invers, dacă această condiție este satisfăcută atunci starea gaussiană cu matricea de covarianță $\gamma$ nu are steering de la Alice la Bob.*

O consecință directă a acestor criterii este că orice matrice de covarianță separabilă nu are steering, datorită relației $\tau_A \oplus \tau_B \geq 0_A \oplus \tau_B$. Prin urmare, steerabilitatea gaussiană reprezintă un criteriu mai strict decât entanglementul. Un lucru și mai important este faptul că ambele seturi de matrici de covarianță, separabile și nesteerabile, formează seturi convexe și închise, și conform *Teoremei de separație Hahn-Banach* din geometria convexă [BV04], pentru un set convex și un punct în afara setului există un hiperplan[1] care taie spațiul în două părți, între punctul considerat și setul convex. Hiperplanele care separă stările entanglate, și respectiv steerabile, se numesc teste de entanglement, și respectiv de steering.

**Definiție 3.1.** *[And03] Se definește setul de matrici simetrice reale $2N \times 2N$ cu condiția*

$$\mathcal{Z}_{A|B}(\mathbb{R}^{2N}) := \{Z | Z \geq 0, \forall \gamma \in \Gamma_{A|B}(\mathbb{R}^{2N}) : \mathrm{Tr}[Z\gamma] \geq 1\}, \tag{3.3}$$

*unde $\gamma$ este matricea de covarianță a unui sistem bipartit cu $N = N_A + N_B$ moduri, iar $\Gamma_{A|B}(\mathbb{R}^{2N})$ este setul de matrici de covarianță separabile. Toate matricile $Z \in \mathcal{Z}_{A|B}(\mathbb{R}^{2N})$ pentru care există $\gamma$ astfel încât $\mathrm{Tr}[Z\gamma] < 1$ se numesc teste de entanglement.*

[1] Un hiperplan este un subspațiu liniar cu o dimensiune mai mică decât dimensiunea spațiului dat.

**Definiție 3.2.** *[Mih+23] Se definește setul de matrici reale simetrice $2N \times 2N$ cu condiția*

$$\mathcal{Z}_{A\not\to B}(\mathbb{R}^{2N}) := \{Z|Z \geq 0, \forall\gamma \in \Gamma_{A\not\to B}(\mathbb{R}^{2N}) : \mathrm{Tr}[Z\gamma] \geq 1\}, \tag{3.4}$$

*unde $\gamma$ este matricea de covarianță a unui sistem bipartit cu $N = N_A + N_B$ moduri, $A \not\to B$ denotă steerabilitatea de la Alice la Bob, și $\Gamma_{A\not\to B}(\mathbb{R}^{2N})$ este setul de matrici de covarianță fără steering. Toate matricile $Z \in \mathcal{Z}_{A\not\to B}(\mathbb{R}^{2N})$ pentru care există $\gamma$ astfel încât $\mathrm{Tr}[Z\gamma] < 1$ se numesc teste de steering bazate pe momente de ordinul doi.*

Astfel, testele de entanglement bazate pe momente de ordinul doi sunt hiperplane care pot fi cel mult tangente la setul de matrici de covarianță separabile, $\mathrm{Tr}[Z\gamma] = 1$, $\forall\gamma = \tau_A \oplus \tau_B$, iar testele de steering sunt condiționate să nu intersecteze setul de matrici nesteerabile, $\mathrm{Tr}[Z\gamma] = 1$, $\forall\gamma = 0_A \oplus \sigma_B$. Aceste ingrediente sunt suficiente pentru a caracteriza complet setul de test de entanglement, și respectiv de steering, după cum urmează.

**Teoremă 3.3.** *[Entanglement] [HE06] O matrice de covarianță $\gamma$ a unui sistem partiționat în $k$ subsisteme cu $\sum_{j=1}^{k} N_j = N$ moduri, este entanglat în această partiție dacă și numai dacă există $Z$ astfel încât*

$$\mathrm{Tr}[Z\gamma] < 1, \tag{3.5}$$

*unde $Z$ este o matrice reală simetrică $2N \times 2N$ care satisface*

$$\begin{gathered} Z \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{k} \mathrm{str}[Z_j] \geq \tfrac{1}{2}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

*unde $Z_j$ este matricea bloc diagonală din $Z$ care corespunde subsistemului $j$. Matricile $Z$ se numesc teste de entanglement bazate pe momente de ordinul doi.*

**Teoremă 3.4.** *[Steerabilitate] [Mih+23] O matrice de covarianță $\gamma_{AB}$ pentru o stare bipartită cu $N = N_A + N_B$ moduri, are steering de la Alice la Bob prin măsurători locale gaussiene dacă și numai dacă există $Z$ astfel încât*

$$\mathrm{Tr}[Z\gamma] < 1, \tag{3.7}$$

*unde $Z$ este o matrice reală simetrică $2N \times 2N$ care satisface*

$$Z \geq 0, \qquad \mathrm{str}[Z_B] \geq \frac{1}{2}, \tag{3.8}$$

*unde $Z_B$ denotă matricea bloc diagonală a matricii $Z$ care corespunde subsistemului lui Bob. Matricile $Z$ sunt numite teste de steering bazate pe momente de ordinul doi.*

## 3.1 Reconstrucția matricii de covarianță

Variantele operatorilor canonici se măsoară prin așa-numita detecție homodyne [BL05], care corespunde proiecției în spațiul fazelor a funcției Wigner pe planul ce formează unghiul $\theta$ cu axa coordonatei $\hat{x}$, astfel încât această direcție corespunde unei quadraturi generalizate $\hat{x}_\theta$, dată de

$$\hat{x}_\theta = \frac{\exp(-\mathrm{i}\,\theta)\;\hat{u} + \exp(\mathrm{i}\,\theta)\;\hat{u}^\dagger}{2} = x\cos\theta + p\sin\theta, \tag{3.9}$$

unde $\hat{u}$ și $\hat{u}^\dagger$ sunt operatorii de anihilare și creare care corespund sistemului. Pentru un sistem compus din două moduri bosonice $\hat{a}$ și $\hat{b}$, modul detectat $\hat{u}$ de un singur detector poate fi reprezentat ca o mixtură între cele două moduri [D'A+05],

$$\hat{u} = \exp(\mathrm{i}\,\varphi)\cos\phi\,\hat{a} + \sin\phi\,\hat{b}. \tag{3.10}$$

Astfel, măsurând cuadratura $x_\theta$ obținem $\langle \hat{x}_\theta \rangle$, care provine dintr-o funcție de probabilitate normală dată de proiecția funcției de cuasi-probabilitate Wigner $W_\rho(x,p)$ în spațiul fazelor,

$$p(x,\theta) = \int dx_{\theta-\frac{\pi}{2}} W_\rho(x,p) = \langle x_\theta|\rho|x_\theta\rangle. \tag{3.11}$$

Varianța cuadraturii generalizate se obține din $p(x,\theta)$, și este dată de

$$\langle \hat{x}_\theta^2 \rangle - \langle \hat{x}_\theta \rangle^2 = \mathrm{Tr}[M\gamma], \tag{3.12}$$

unde $\gamma$ este matricea de covarianță a stării bimodale, și

$$M = vv^{\mathrm{T}}, \quad v = \big(\cos\phi\cos(\theta-\varphi), \quad \cos\phi\sin(\theta-\varphi), \quad \sin\phi\cos\theta, \quad \sin\phi\sin\theta\big)^{\mathrm{T}} \tag{3.13}$$

este matricea care reprezintă măsurătoarea.

## 3.2 Algoritmul de optimizare

Programarea semidefinită (SDP) rezolvă probleme de optimizare convexă și poate fi văzută ca o generalizare pentru programarea liniară și cuadratică, unde inegalitățile pentru vectori sunt înlocuite de inegalități matriciale [VB96]. În esență SDP optimizează o funcție liniară, date fiind niște constrângeri în formă de inegalități matriciale. În continuare propunem un set de constrângeri liniare pentru testele de entanglement și steering care înlocuiesc în algoritmul de optimizare constrângerile ce caracterizează complet testele, așa cum a fost demonstrat în Teorema 3.3 și Teorema 3.4.

**Propoziție 3.1.** *[Mih+20] Pentru un test de entanglement $Z$ într-o partiție în $k$ subsisteme cu $\sum_{j=1}^{k} N_j = N$, a unei matrici de covarianță entanglate de $N$ moduri, inegalitățile (3.6) sunt satisfăcute dacă următoarele condiții sunt îndeplinite:*

$$\begin{gathered} Z \geq 0, \\ Z_j + \mathrm{i}\,\tfrac{x_j}{N_j}\Omega_{N_j} \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1,\ldots,k-1, \\ Z_k + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{N_k}\Big(\tfrac{1}{2} - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} x_j\Big)\Omega_{N_k} \geq 0. \end{gathered} \tag{3.14}$$

**Propoziție 3.2.** *[Mih+23] Pentru un test de steering $Z$ a unei matrici de covarianță de $N = N_A + N_B$ moduri, cu steering de la Alice la Bob, inegalitățile (3.8) sunt satisfăcute daca (și numai dacă pentru $N_B = 1$) următoarele condiții sunt îndeplinite:*

$$\begin{gathered} Z \geq 0, \\ Z_B + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2N_B}\Omega_{N_B} \geq 0. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Aceste constrângeri caracterizează exact setul de teste de entanglement și steering pentru matrici de covarianță bimodale, dar pentru mai multe moduri ele restrâng setul de teste, totuși au avantajul că sunt liniare și pot fi folosite într-un algoritm care să gasească un test potrivit pentru o stare dată. De exemplu, entanglementul într-o matrice de covarianță bimodală este detectat folosind următorul algoritm SDP:

$$
\begin{aligned}
\underset{x,\mathbf{c}}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}\cdot\mathbf{m} \\
\text{subject to} \quad & Z = \sum_i c_i M_i, \\
& Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_2 \end{pmatrix} \geq 0, \\
& Z_1 + \mathrm{i}\, x\, \Omega_1 \geq 0, \\
& Z_2 + \mathrm{i}(\frac{1}{2} - x)\Omega_1 \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

unde $\mathbf{m} = \mathrm{Tr}[\mathbf{M}\gamma]$ este vectorul de rezultate ale măsurătorilor, $\mathbf{M}$ este vectorul de matrici de măsurătoare $M_i$ ce acționează pe matricea de covarianță $\gamma$, și $i$ indică numărul de măsurători folosite în algoritm. Pentru detectarea steeringului procedura este similară, doar constrângerile sunt diferite,

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathbf{c}}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}\cdot\mathbf{m} \\
\text{subject to} \quad & Z = \sum_i c_i M_i, \\
& Z = \begin{pmatrix} Z_A & Z_{12} \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_B \end{pmatrix} \geq 0, \\
& Z_B + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\Omega_B \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Acești algoritmi SDP detectează corelații cuantice în matrici de covarianță arbitrare

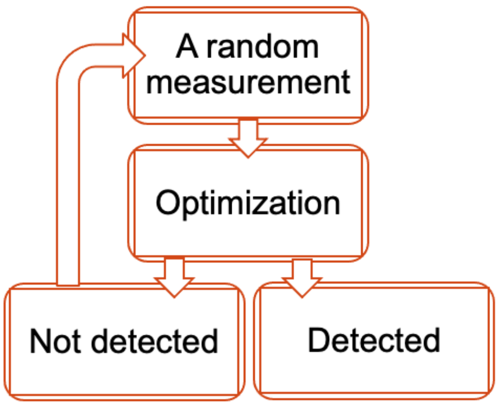



FIGURE 3.1: Strategia pentru generarea de teste pentru entanglement și steering într-o matrice de covarianță necunoscută, începând cu măsurători aleatorii și făcând optimizarea din (3.16) și (3.17), respectiv. Scopul este să înregistrăm numărul de măsurători necesare pentru detectare.

pentru care se cunoaște doar dimensiunea. În cazul cel mai general, cand nu se cunoaște forma matricii de covarianță și nici sursa sistemului, nu există niciun indiciu pentru o strategie eficientă de detecție. Astfel, strategia potrivită pentru acest caz ar fi să se facă măsurători aleatorii. În plus, acești algoritmi pot fi folosiți pentru a studia de câte măsurători este nevoie în principiu, pentru detectarea entanglementului și steeringului. Prin urmare, noile măsurători vor fi adăugate una câte una, și optimizarea se face la fiecare pas până când este detectat entanglementul sau steeringul, cum este arătat în Fig. 3.1.

### 3.2.1 Stări gaussiene aleatorii

O stare gaussiană de două moduri are matricea de covarianță cu următoarea structură

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_A & \gamma_C \\ \gamma_C^{\mathrm{T}} & \gamma_B \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

unde $\gamma_A$ și $\gamma_B$ sunt matrici de covarianță $2 \times 2$ pentru primul și al doilea mod, iar $\gamma_C$

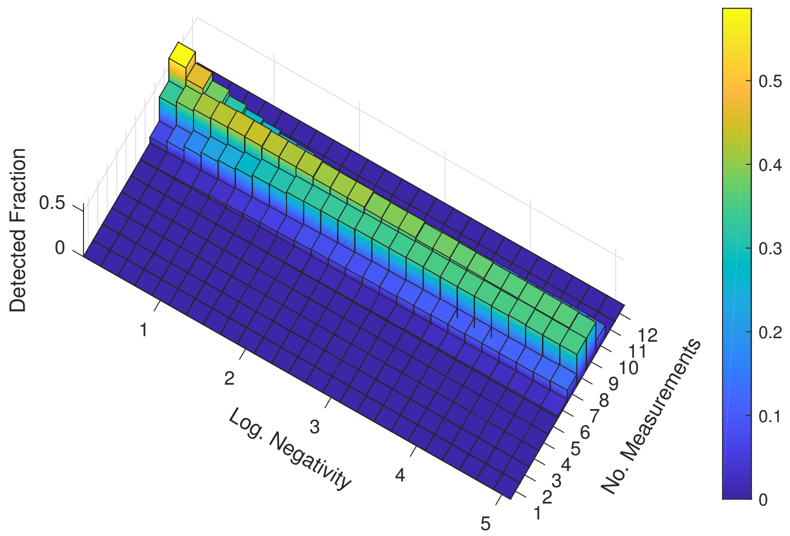



FIGURE 3.2: [Mih+20] Fracția de detectare a entanglementului în stări aleatorii de două moduri: $5 \times 10^5$ rulări ale algoritmului pentru $\nu_i \in [0, 5]$ și $r_i \in [0, 2]$, cuantificat după Eq. (3.19). Considerând succesiv noi măsurători testul de entanglement este evaluat la fiecare pas până când prezența entanglementului este confirmată. Datele sunt normate astfel încât suma lor este $1$ pentru fiecare valoare a entanglementului.

este matricea de corelație între moduri. Entanglementul este cuantificat de negativitatea logaritmică dată de [ASI04]:

$$E = \max\{0, -\frac{1}{2}\log_2 f\}, \tag{3.19}$$

unde

$$\begin{aligned} f = \; & \tfrac{1}{2}(\det\gamma_A + \det\gamma_B) - \det\gamma_C \\ & - \left( \left[\tfrac{1}{2}(\det\gamma_A + \det\gamma_B) - \det\gamma_C\right]^2 - \det\gamma \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Steeringul de la subsistemul A la B este dat de valorile simplectice $\mu_j^B$ mai mici ca $1$ ale complementului Schur definit ca $\gamma_A^B := \gamma_B - \gamma_C^{\mathrm{T}}\gamma_A^{-1}\gamma_C$ [Kog+15],

$$\mathcal{G}^{A\to B}(\gamma) = \max\left\{0, -\sum_{j:\mu_j^B<1} \ln(\mu_j^B)\right\}. \tag{3.21}$$

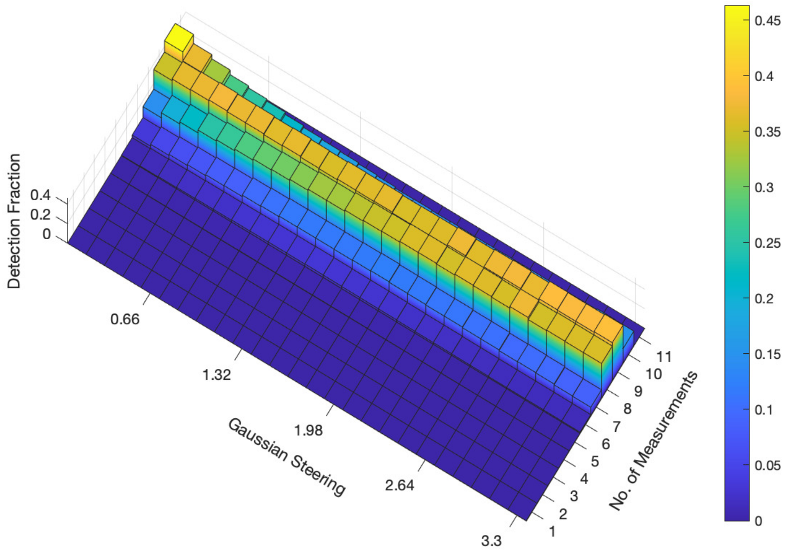



FIGURE 3.3: [Mih+23] Fracția de detectare a steeringului în stări aleatorii de două moduri pentru $\nu_i \in [0,5]$ și $r_i \in [0,2]$, cuantificat după Eq. (3.21). Sunt reprezentate $5 \times 10^5$ rulări ale algoritmului, unde măsurătorile sunt făcute succesiv și testul de steering este evaluat la fiecare pas până când este confirmat steeringul. Datele sunt normate pentru fiecare valoare a steeringului astfel încât suma lor este 1.

Matricile de covarianță aleatorii se formează pornind de la matricea de covarianță a stării termice $\gamma_{th}$ de formă diagonală [Wee+12], cu valorile proprii simplectice notate $\nu_k \geq 1$ $(k = 1, ..., N)$ generate aleator conform unei distribuții uniforme într-un interval finit real $[1, t]$, $t > 1$:

$$\gamma_{th} = \bigoplus_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

În continuare se aplică transformări simplectice aleatorii $S$, și se obține:

$$\gamma = S\gamma_{th}S^{\mathrm{T}}. \tag{3.23}$$

Fig. 3.2 reprezintă eficiența detectării entanglementului din perspectiva numărului necesar de măsurători. Aici se observă că entanglementul mai puternic necesită mai puține măsurători pentru a fi detectat. În particular, pentru un entanglement slab de regulă se fac $10$ măsurători, la fel ca în tomografia completă, în timp ce un entanglement mai puternic se detectează cu $8 - 9$ măsurători. Similar, detectarea steeringului în stări gaussiene aleatoare prezentat în Fig. 3.3 are un comportament fenomenologic similar cu al entanglementului, și anume, cu cât este mai mare valoarea steeringului, cu atât este mai ușor de detectat, pentru că necesită mai puține măsurători.

### 3.2.2 Bound entanglement

Pentru stările gaussiene criteriul transpusei parțiale pozitive (PPT) este necesar și suficient doar pentru partițiile de $1 \times N$ moduri. În Ref. [WW01] este dat un exemplu de matrice de covarianță de patru moduri ce conțin bound entanglement în partiția $2 \times 2$, care se definește ca stare entanglată cu PPT,

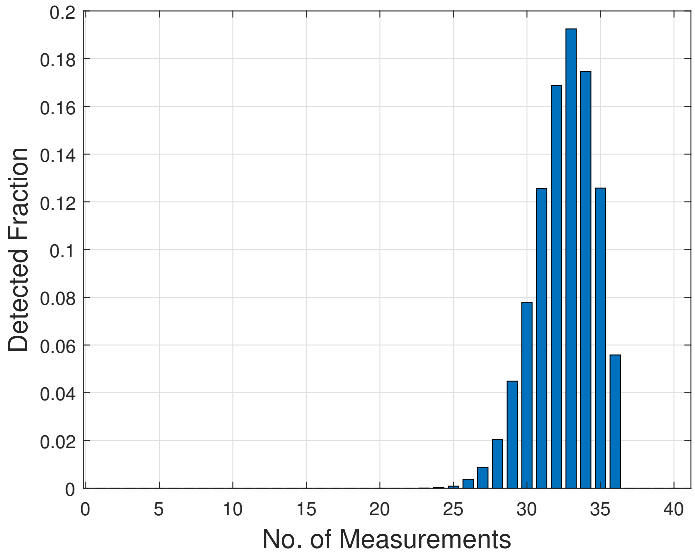



FIGURE 3.4: [Mih+20] Fracția de detectare a entanglementului pentru o stare de $4$ moduri cu bound entanglement, vezi Eq. (3.24): $10^4$ rulări ale algoritmului. Măsurătorile se execută una câte una și starea este verificată pentru fiecare măsurătoare nouă până când entanglementul este detectat. Datele sunt normate astfel încât suma lor este $1$.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

O stare gaussiană de $N$ moduri are matricea de covarianță descrisă de $N(2N+1)$ parametri independenți, care este și numărul necesar pentru tomografia completă. Matricea de covarianță în Eq. (3.24) are doar $12$ parametri diferiți de zero, însă în programul nostru de optimizare pentru detectarea entanglementului noi considerăm matricea ca fiind de formă generală pentru patru moduri, în care caz este nevoie de $36$ măsurători. Valoarea minimă pentru această stare este dată de $\mathrm{Tr}[Z_{min}\gamma] = 0.8966$. Fig. 3.4 reprezintă fracția de detectare a bound-entanglementului în matricea de covarianță din Eq. (3.24) în funcție de numărul necesar de măsurători. Cu metoda noastră se certifică prezența entanglementului în medie cu $33$ măsurători aleatorii, ceea ce este o îmbunătățire față de tomografia completă.

### 3.2.3 Steeringul în starea GHZ de variabile continue

Stările GHZ de trei qubiți sunt bine cunoscute în teoria informației cuantice, și analogul lor în variabile continue sunt de un mare interes în multe aplicații. În experimente acestea se crează de la o rază comprimată în poziție cu parametrul de comprimare $r_q$ și o rază comprimată în impuls cu parametrul $r_p$. Prin combinația acestor raze pe un "double beam splitter" se obține o stare pură, complet inseparabilă de trei moduri cu matricea de covarianță simetrică dată de [LB00]

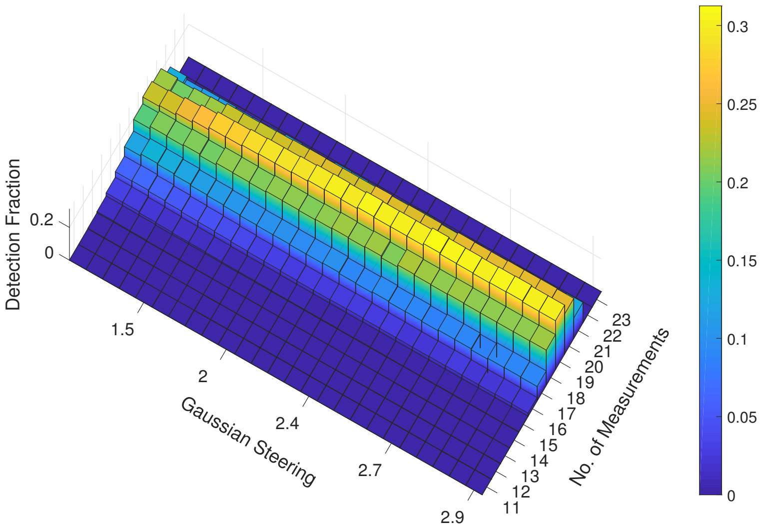



FIGURE 3.5: [Mih+23] Fracția de detecție a steeringului în stări GHZ de trei moduri cu $a = 2, 3, ..., 26$, vezi Eq. (3.25). Datele sunt obținute de la $4.5 \times 10^5$ rulări ale algoritmului, și sunt normate astfel încât suma lor este 1.

$$\gamma_{GHZ} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & -c & 0 & -c \\ c & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & b & 0 & -c \\ c & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & -c & 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

unde $a$ reprezintă comprimarea globală dată de [ASI06] $a = \frac{1}{3}\sqrt{4\cosh 2(r_q + r_p) + 5}$, și $b = \frac{1}{4}(5a - \sqrt{9a^2 - 8})$, $c = \frac{1}{4}(a - \sqrt{9a^2 - 8})$. În realitate, doar în limita de comprimare infinită ($a \to \infty$) matricea de covarianță din Eq. (3.25) se apropie de starea GHZ reală, care este nenormată și reprezintă vectorul propriu cu valoarea proprie zero simultan pentru operatorul de impuls total $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3$ și operatorii de poziție relativă $\hat{x}_i - \hat{x}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ [LB01].

Starea GHZ de variabile continue este complet inseparabilă, dar are și steering de la Alice la Bob, dacă considerăm că Alice are un mod bosonic și Bob are celelalte două moduri. Matricea de covarianță din Eq. (3.25) este simetrică, deci Alice poate avea pe oricare din cele trei moduri. Complementul Schur corespunzători acestei partiții are una din valorile proprii simplectice mai mică decât 1 pentru $a = 2, 3, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, și prin urmare, putem să cuantificăm steeringul folosind măsura din Eq. (3.21).

Rezultatele aplicării metodei noastre pentru detectarea steeringului prin măsurători aleatorii sunt ilustrate în Fig. 3.5. La fel ca în secțiunile precedente, datele sunt colectate prin înregistrarea numărului de măsurători necesar pentru detectarea steeringului, unde optimizarea are loc când măsurătorile sunt făcute pe rând, una câte una, până când prezența steeringului este detectată. Pentru o matrice de covarianță de trei moduri sunt necesare $21$ de măsurători, și totuși în Fig. 3.5 o treime din stările cu steering sunt detectate cu doar $19$ măsurători, și în jur de $25\%$ dintre stări necesită $18$ și $20$ măsurători. Totuși, din Propoziția 3.2 se știe că această metodă are cel mai mic randament atunci când Bob are două moduri ($N_B = 2$), deoarece în acest caz constrângerile liniare sunt mai stricte în comparație cu constrângerile reale care caracterizează setul de teste pentru steering (vezi Teorema 3.4). Prin urmare, o mică fracție de stări ($3\%$) necesită mai multe măsurători decât în tomografia totală pentru a detecta steeringul.

## 3.3 Analiza statistică

Eroarea statistică asociată operatorului de test în metoda noastră este dată de [Mih+20]

$$\Delta\bar{Z} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{M}_i}\right)^2 (\Delta\bar{M}_i)^2} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\sqrt{\sum_i c_i^2 m_i^2}. \tag{3.26}$$

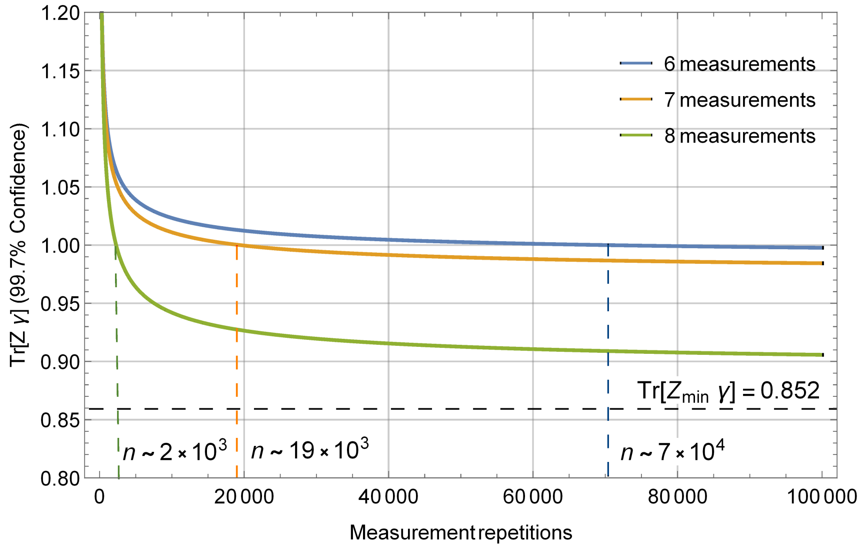



FIGURE 3.6: [Mih+20] Intervalul de confidență $3\sigma$ pentru testul de entanglement $Z$ pe o stare gaussiana cu matricea de covarianță $\gamma$, estimat statistic în Eq. (3.26). Linia orizontală întreruptă indică valoarea minimă a testului pentru starea vacuum comprimată considerată $\mathrm{Tr}[Z_{min}\gamma] = 0.852$. Liniile verticale intrerupte indică numărul de repetiții ale măsurătorilor necesare pentru detectarea entanglementului cu $6$ (albastru), $7$ (oranj) și $8$ (verde) măsurători.

Datele experimentale din masurătorile de tip homodyne constau din rezultatele măsurătorilor valorilor medii ale cuadraturii generalizate $\langle\hat{x}_{\theta_i}\rangle$ unde $\theta_i$ este direcția de măsurătoare în spațiul fazelor. Pe lângă aceasta, pentru fiecare astfel de măsurătoare este nevoie de un număr relativ mare de repetiții ale acestei măsurători, și prin urmare, datele experimentale sunt date de variabilele aleatorii $X_{ij} = \langle\hat{x}_{\theta_i}\rangle_j$, $(j = 1, \ldots, n_i)$, unde $n_i$ este numărul de repetiții ale măsurătorii date de dirrecția $\theta_i$. Stările gaussiene sunt reprezentate de funcții de cuasi-probabilitate normale, și prin urmare, proiecția funcției Wigner pe planul descris de direcția $\theta_i$ este tot o funcție gaussiană. În consecință, se obține un eșantion de variabile aleatorii care are o distrbuție normală cu valoarea medie $\mu_i$ și varianța $\sigma_i^2 = (\Delta\hat{x}_{\theta_i})^2$. În concordanță cu notația din Sec. 3.1 identificăm echivalența $\sigma_i^2 \equiv m_i$, unde $m_i = \mathrm{Tr}[M_i\gamma] = (\Delta\hat{x}_{\theta_i})^2$ (vezi Eq. (3.12)), și prin urmare distribuția normală care dictează rezultatele măsurătorii pentru fiecare direcție de măsurare $\theta_i$ este dată de $N_i(\mu_i, m_i)$. Important de notat este faptul că această relație se aplică doar pentru matricile de covarianță care provin de la stări gaussiene, adică datele experimentale provin dintr-o funcție de distribuție normală.

În Fig. 3.6 se consideră o stare de vacuum comprimată entanglată de două moduri cu valoarea de entanglement dată de $\mathrm{Tr}[Z_{min}\gamma] = 0.852$, unde $Z_{min}$ este testul ce dă valoarea minimă pentru matricea de covarianță $\gamma$. Se arată intervalul de confidență $3\sigma$ pentru $\mathrm{Tr}[Z\gamma]$ în funcție de numărul de repetiții ale măsurătorilor $n$, unde testul de entanglement $Z$ este evaluat folosind $6$, $7$ și $8$ măsurători. Entanglementul este determinat atunci când $\mathrm{Tr}[Z\gamma] < 1$, și se observă că folosind $8$ direcții de măsurători diferite este nevoie de mai puține repetări ale măsurătorilor ($\approx 2 \times 10^3$) în comparație cu $6$ și $7$ măsurători ($\approx 1.9 \times 10^4$). Pentru o matrice de covarianță de două moduri este nevoie de $10$ măsurători independente pentru tomografia completă.

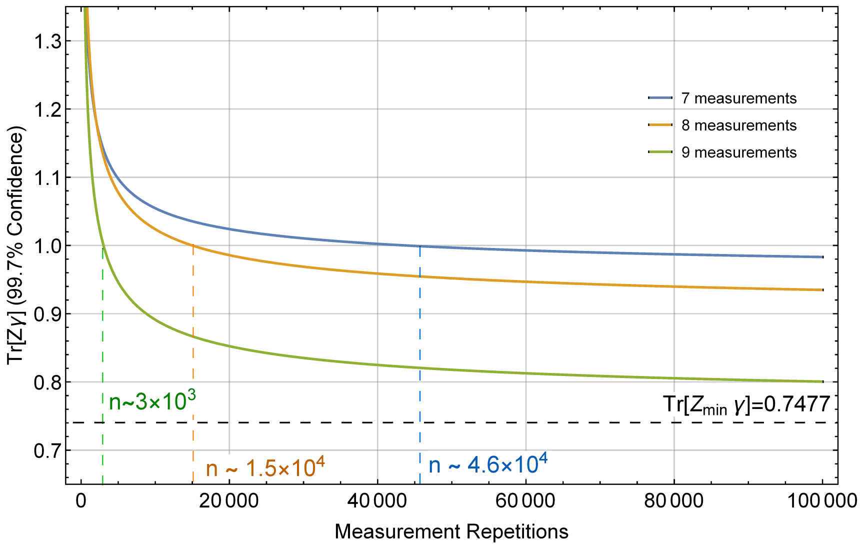



FIGURE 3.7: [Mih+23] Intervalul de confidență $3\sigma$ pentru testul de steering $Z$ pe o stare gaussiana cu matricea de covarianță $\gamma$, estimat statistic în Eq. (3.26). Linia orizontală întreruptă indică valoarea minimă a testului pentru starea de vacuum comprimată considerată $\mathrm{Tr}[Z_{min}\gamma] = 0.7477$. Liniile verticale intrerupte indică numărul de repetiții ale măsurătorii necesare pentru detectarea entanglementului cu $7$ (albastru), $8$ (oranj) și $9$ (verde) măsurători.

Similar, în Fig. 3.7 este ilustrată detectarea steeringului în funcție de numărul de repetiții pentru $7$, $8$ și $9$ măsurători. Se arată că steeringul în general se detectează mai greu decât entanglementul, ceea ce este în concordanță cu faptul că steeringul este o corelație mai puternică. Această analiză poate fi relevantă pentru a decide dacă este nevoie de noi măsurători sau trebuie sa se facă mai multe repetări ale masurătorilor, pentru detectarea mai eficientă a corelațiilor cuantice.

# Dinamica Sistemelor Cuantice Deschise

Considerăm un sistem fizic în spațiul Hilbert asociat $\mathcal{H}$, spațiul de operatori de densitate $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, ce reprezintă stările cuantice ale sistemului, și o aplicație $\mathcal{V} : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H})$,

$$\mathcal{V}\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), \qquad \rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}). \tag{4.1}$$

Pentru a reprezenta o evoluție fizică, numită și canal cuantic, orice aplicație definită astfel trebuie să fie liniară, pozitivă, hermitică și să păstreze urma egala cu $1$. Totuși, este nevoie de o constrângere mai strictă decât pozitivitatea pentru a garanta validitatea fizică a unei aplicații, și anume complet-pozitivitatea.

**Definiție 4.1.** *[Wil17][Aplicații Complet Pozitive] O aplicație liniară $\mathcal{V} : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H})$ este complet pozitivă (CP) dacă și numai dacă $\mathcal{V} \otimes \mathbb{I}_R$ reprezintă o aplicație pozitivă pentru un sistem de referință $R$ de dimensiune arbitrară.*

Astfel, cea mai generală transformare a unei stări cuantice este dată de o aplicație liniară, complet pozitivă și care păstrează urma (CPTP).

## 4.1 Ecuația master Lindblad

Un rezultat faimos care utilizează cel mai general generator pentru dinamica markoviană bazat pe semigrupuri dinamice complet pozitive, îl constituie *ecuația master Lindblad* [Lin76] [GKS76]. Semigrupurile dinamice complet pozitive sunt reprezentate de aplicații CPTP dependente de timp $\mathcal{V}(t)$, $t > 0$, care formează o familie de aplicații dinamice $\{\mathcal{V}(t)|t \geq 0\}$, unde $\mathcal{V}(0)$ este aplicația identică. În ecuațiile de tip markovian sunt neglijate efectele de memorie, și se impune condiția ca aplicațiile dinamice să aibă proprietatea de semigrup,

$$\mathcal{V}(t_1)\mathcal{V}(t_2) = \mathcal{V}(t_1 + t_2), \qquad t_1, t_2 \geq 0. \tag{4.2}$$

În formalismul teoriei sistemelor deschise se deduce un set de ecuații diferențiale continue, numite ecuații master, de forma

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t), \tag{4.3}$$

unde $\mathcal{L}$ este generatorul independent de timp al evoluției. Astfel, relația dintre aplicația CPTP și generatorul $\mathcal{L}$ este dată de

$$\mathcal{V}(t) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}. \tag{4.4}$$

Generatorul pentru ecuația master Lindblad este de forma [Lin76] [GKS76]

$$\mathcal{L}\rho = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, \rho] + \sum_{k}^{d^2-1} g_k \big(F_k \rho F_k^\dagger - \frac{1}{2} F_k^\dagger F_k \rho - \frac{1}{2} \rho F_k^\dagger F_k\big), \tag{4.5}$$

unde primul termen reprezintă evoluția unitară a sistemului, generată de Hamiltonianul $H$, și al doilea termen reprezintă evoluția neunitară, care descrie procesele de decoerență și disipare în sistem. Coeficienții $g_k$ caracterizează mediul și provin din funcțiile de corelație ale mediului, iar operatorii $F_k$ se află în spațiul Hilbert asociat sistemului studiat, astfel încât ecuația master descrie evoluția unui sistem doar în funcție de gradele de libertate ale sistemului. Ecuația master (4.3) cu generatorul $\mathcal{L}$ (4.5) asociat unui semigrup dinamic reprezintă forma cea mai generală a unei ecuații master markoviene.

## 4.2 Baia termică și baia termică comprimată

Considerăm un sistem cuantic în interacție cu un câmp cuantificat de radiație, reprezentat de un rezervor cu un număr infinit de grade de libertate. În particular, baia termică este un mediu format dintr-un număr mare de oscilatori armonici, indexați cu $k$, în starea de echilibru termic,

$$\rho_{th} = \prod_k (1 - \mathrm{e}^{-\hbar\beta\omega_k})\, \mathrm{e}^{-\hbar\beta\omega_k b_k^\dagger b_k}, \tag{4.6}$$

unde $\beta = 1/k_B T$, $T$ este temperatura băii și $k_B$ constanta Boltzmann, iar $b_k^\dagger$ și $b_k$ sunt operatorii de creare și anihilare. Stările termice fac parte din clasa de stări gaussiene, care sunt descrise de momentele statistice de ordinul unu și doi, care formează vectorul de translație și matricea de covarianță. Matricea de covarianță pentru starea termică este dată de

$$\gamma_{th} = \bigoplus_k \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2m\omega_k} \coth \frac{\hbar\omega_k}{2k_B T} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar m\omega_k}{2} \coth \frac{\hbar\omega_k}{2k_B T} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

unde se consideră oscilatori cu mase egale $m_k = m$, iar $\omega_k$ este fracvența oscilatorului $k$.

Un mediu mai general este dat de rezervorul termic comprimat, aflat într-o stare cuantică în echilibru termic care suferă o transformare de comprimare pentru fiecare mod individual, astfel încât

$$\rho_{sq} = \prod_k S(\xi_k)(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\beta\omega_k})\, \mathrm{e}^{-\hbar\beta\omega_k b_k^\dagger b_k}\, S^\dagger(\xi_k), \tag{4.8}$$

unde $S(\xi)$ este operatorul de comprimare unimodal,

$$S(\xi) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\xi^* b^2 - \xi b^{\dagger 2})}, \tag{4.9}$$

cu variabila $\xi = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ dată de constanta de comprimare a băii $R$ și faza de comprimare $\varphi$. Astfel, se obține un mediu modelat ca un continuum de oscilatori comprimați în aceeași direcție. Matricea de covarianță a stării ce descrie baia termică comprimată este dată de următoarea expresie [BP02]:

$$\gamma_{sq} = \bigoplus_k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + N_k + \mathrm{Re}[M_k] & \mathrm{Im}[M_k] \\ \mathrm{Im}[M_k] & \frac{1}{2} + N_k - \mathrm{Re}[M_k] \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

unde

$$\begin{aligned} N_k &= n_{th,k}(\cosh^2 R + \sinh^2 R) + \sinh^2 R, \\ M_k &= -(2n_{th,k} + 1)\cosh R \sinh R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Astfel, $N_k$ coincide cu numărul mediu termic al fotonilor dacă $M_k = 0$, ceea ce indică faptul că baia este în echilibru termic, în caz contrar se spune că baia este comprimată. În continuare vom considera $N_k = N$ și $M_k = M$ pentru toate modurile $k$ ale băii.

Considerăm un sistem de două moduri bosonice cuplate în operatorii de poziție în interacție cu o baie termică comună. Hamiltonianul care determină evoluția sistemului este dat de

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) + qxy,$$

unde perechile de operatori autoadjuncți de poziție și impuls pentru primul mod sunt $x$ și $p_x$, iar pentru al doilea mod sunt $y$ and $p_y$, și $q$ este constanta de cuplaj dintre moduri. La rezolvarea ecuației master Lindblad în termeni de varianțe ale operatorilor canonici coeficienții $g_k$ din ecuația (4.5) determină matricea asociată stării Gibbs a băii termice, numită matrice de difuzie [Isa+94]:

$$D = \oplus_{j=1,2} \begin{pmatrix} \frac{\hbar\lambda}{2m\omega_j} \coth \frac{\hbar\omega_j}{2k_B T} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\lambda m\omega_j}{2} \coth \frac{\hbar\omega_j}{2k_B T} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

unde $\lambda$ este coeficientul de disipare al băii. Ecuația de evoluție temporală pentru matricea de covarianță este

$$\gamma(t) = Z(t)[\gamma(0) - \gamma(\infty)]Z^{\mathrm{T}}(t) + \gamma(\infty), \tag{4.13}$$

unde $Z(t) = \mathrm{e}^{Yt}$ și

$$Y = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -m\omega_1 & -\lambda & q & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{m} \\ q & 0 & -m\omega_2 & -\lambda \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Matricea de covarianță $\gamma(\infty)$ corespunde stării staționare și se obține din relația $\frac{d}{dt}\gamma = 0$.

## 4.3 Dinamica corelațiilor cuantice gaussiene

Considerăm ca stare inițială clasa de stări termice comprimate, care sunt des studiate și conțin corelații cuantice, cum sunt entanglementul, steeringul și discordul. Forma standard a matricilor de covarianță termice comprimate este:

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & -c \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

cu

$$\begin{aligned} a &= n_1 \cosh^2 r + n_2 \sinh^2 r + \tfrac{1}{2}\cosh 2r, \\ b &= n_1 \sinh^2 r + n_2 \cosh^2 r + \tfrac{1}{2}\cosh 2r, \\ c &= \tfrac{1}{2}(n_1 + n_2 + 1)\sinh 2r, \end{aligned} \tag{4.16}$$

unde $n_1$, $n_2$ sunt numărul mediu de fotoni pentru fiecare mod, și $r$ este parametrul de comprimare. Starea este entanglată pentru $r > r_s$, unde $\cosh^2 r_s = (n_1 + 1)(n_2 +$

$1)/(n_1+n_2+1)$. În continuare vom folosi reprezentarea bloc pentru o matrice de covarianță de două moduri,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_A & \gamma_C \\ \gamma_C^{\mathrm{T}} & \gamma_B \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

unde $\gamma_A$ și $\gamma_B$ sunt matricile de covarianță pentru primul și al doilea mod, respectiv, iar $\gamma_C$ este matricea de corelație dintre moduri.

### 4.3.1 Rata producției de entropie

Conform legii a doua a termodinamicii un sistem în interație cu mediul înconjurător face schimb de energie cu mediul, astfel încât sistemul trece printr-o modificare a entropiei interne $\Delta\mathcal{S}$ cu limita de jos dată de [GM61]:

$$\Delta\mathcal{S} \geq \int \frac{\delta Q}{T}, \tag{4.18}$$

unde $\delta Q$ este absorbția infinitezimală a căldurii de către sistem din mediul cu temperatura $T$. Egalitatea în această relație înseamnă că transferul de informație de la sistem spre mediu este egal cu variația globală a entropiei din sistem, iar inegalitatea strictă din (4.18) indică faptul că procesul este ireversibil și se produce o cantitate de entropie datorată procesului. Astfel, se poate defini producția de entropie $\Sigma$ ca

$$\Sigma \equiv \Delta S - \int \frac{\delta Q}{T} \geq 0. \tag{4.19}$$

Din această relație rezultă

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \Pi(t) - \Phi(t), \tag{4.20}$$

unde $\Pi(t)$ denotă rata producției ireversibile de entropie și $\Phi(t)$ este fluxul de entropie de la sistem spre mediu. Pentru stările gaussiene entropia poate fi exprimată folosind reprezentarea în spațiul fazelor a funcției Wigner [SLP17].

Pentru două moduri bosonice cuplate, în interacție cu o baie termică se obține următoarea expresie dependentă de timp a ratei producției de entropie (EP) $\Pi(t)$ [SF12] [BP16]:

$$\Pi(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^{-1}(t)D] + 2\mathrm{Tr}[Y^{\mathrm{irr}}] + 2\mathrm{Tr}[(Y^{\mathrm{irr}})^{\mathrm{T}}D^{-1}Y^{\mathrm{irr}}\gamma(t)], \tag{4.21}$$

unde variabilele dinamice sunt divizate în funcție de simetria față de operatorul de translație temporală dat de matricea simplectică $E = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$. Astfel, matricea de drift $Y$ (4.14) conține o componentă ireversibilă $Y^{\mathrm{irr}}$ și una reversibilă $Y^{\mathrm{rev}}$, definite ca

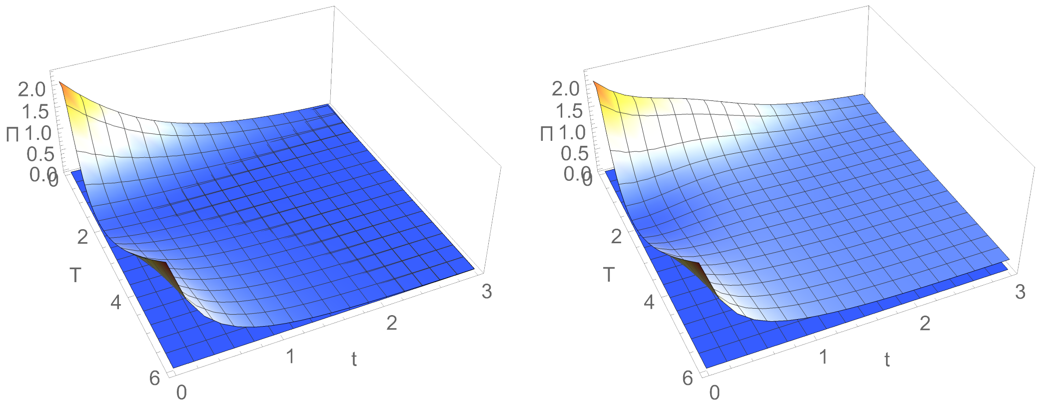
$$Y^{\mathrm{irr}} = \frac{1}{2}\left(Y + EYE^{\mathrm{T}}\right), \quad Y^{\mathrm{rev}} = \frac{1}{2}\left(Y - EYE^{\mathrm{T}}\right). \tag{4.22}$$

În particular, când sistemul ajunge la o stare staționară $\gamma_s$, expresia (4.21) devine [BP16]

$$\Pi_s = \mathrm{Tr}[Y^{\mathrm{irr}}] + 2\mathrm{Tr}[(Y^{\mathrm{irr}})^T D^{-1}Y^{\mathrm{irr}}\gamma_s]. \tag{4.23}$$

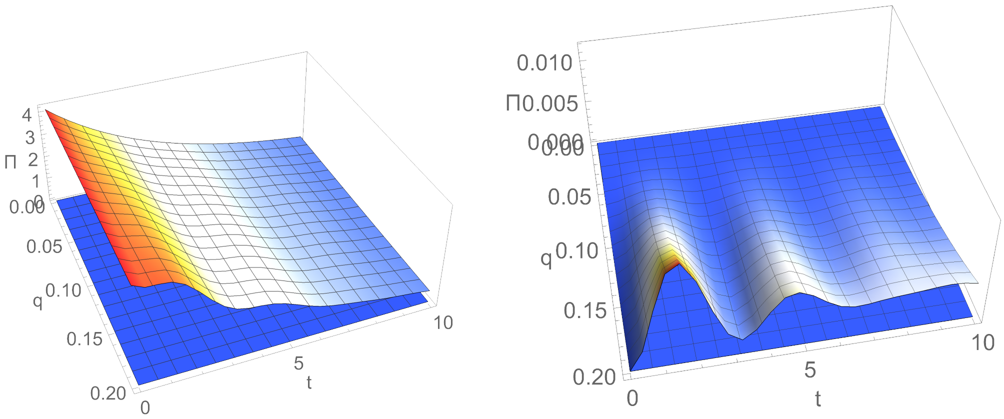
În continuare vom prezenta rezultatele principale obținute în Ref. [MI22], luând ca stare inițială starea termică comprimată (4.15).

În Fig. 4.1 este ilustrată evoluția în timp a ratei EP pentru o stare inițială termică simetrică în funcție de temperatura rezervorului. La momentul inițial de timp rata EP este o funcție convexă de temperatura mediului, însă după puțin timp ea devine




(a) (b)

FIGURE 4.1: [MI22] Rata producției de entropie dependentă de timp $t$ și temperatură $T$ pentru moduri nerezonante cu fracvențele $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1.7$ într-o stare inițială termică simetrică (comprimarea $r = 0$) cu numărul mediu termic $n = 1$, și constanta cuplajului $q = 0$ (a), și $q = 0.8$ (b). Parametrul de disipare este $\lambda = 0.4$.

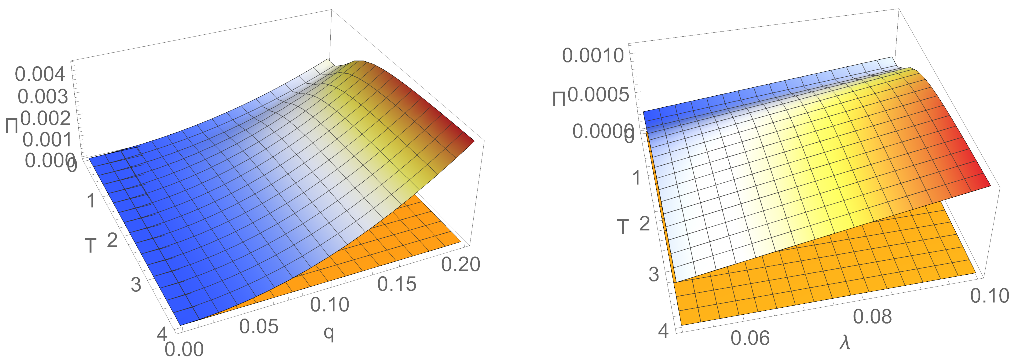



(a) (b)

FIGURE 4.2: [MI22] Rata producției de entropie dependentă de timp $t$ și cuplajul $q$ dintre două moduri rezonante cu frecvența $\omega = 1$, într-o stare inițială termică comprimată cu $r = 1$ și numărul mediu de fotoni $n = 1$ (a), și o stare coerentă cu $r = 0$ și $n = 0$ (b). Parametrii băii termice sunt temperatura $T = 0.1$ și disiparea $\lambda = 0.1$.

funcție plată și tinde asimptotic la zero dacă modurile nu sunt cuplate, sau tinde către o valoare finită diferită de zero pentru moduri cuplate. Prin urmare, cuplajul dintre moduri este crucial pentru existența ratei EP în starea staționară.

Evoluția temporală a ratei EP în funcție de cuplajul dintre moduri este arătată în Fig. 4.2 (a) pentru starea inițială termică comprimată simetrică, și în (b) pentru starea inițială coerentă, care este starea de vacuum cu comprimare și numărul termic fotonic zero. După cum se vede, cuplajul dintre moduri crește rata EP, un fenomen care este mai evident pentru stările de vacuum. În plus, se observă apariția unor oscilații pentru cuplaj diferit de zero între moduri, care sunt mai pronunțate în stările vacuum și pentru cuplaj relativ mai puternic.




(a) (b)

FIGURE 4.3: [MI22] Rata producției de entropie dependentă de temperatura $T$ a rezervorului și cuplajul $q$ dintre moduri pentru $\lambda = 0.1$ (a), și disiparea $\lambda$ cu cuplajul $q = 0.1$ (b), în starea staționară. Frecvențele modurilor sunt $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1.7$.

În Fig. 4.3 este arătată dependența ratei EP în starea staționară în funcție de temperatura rezervorului termic și cuplajul dintre două moduri bosonice nerezonante în (a), și în funcție de parametrul de disipare (b). În starea staționară rata EP crește pentru valori relativ mici ale temperaturii băii termice, după care atinge un platou pentru temperaturi mai mari. Mai mult, valoarea ratei EP în starea sttionară este diferită de zero doar dacă modurile în interație cu baia termică sunt cuplate între ele. Pentru cuplaj zero rata EP devine zero, iar sistemul se relaxează de la o stare staționară de neechilibru la starea de echilibru termic Gibbs, ceea ce este în concordanță cu rezultatele obținute anterior [BP02].

### 4.3.2 Steeringul

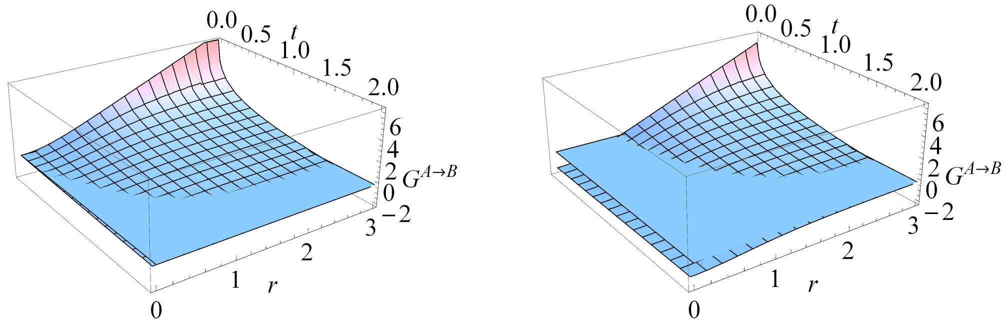
Aici prezentăm rezultatele obținute în Ref. [MI17] și [MI18], unde se studiază evoluția în timp a steeringului gaussian când Alice execută măsurători locale și influențează starea lui Bob, și este dat de expresia ($\hbar = 1$) [Kog+15]:

$$\mathcal{G}^{A\to B}(\gamma) = \max\left\{0, \frac{1}{2}\ln\frac{\det\gamma_A}{4\det\gamma}\right\}, \tag{4.24}$$

în termeni de matricea de covarianță pentru Alice $\gamma_A$ și matricea de covarianță a sistemului total $\gamma$ (4.17). Evoluția unei stări gaussiene bipartite arbitrare ce constă din două moduri bosonice necuplate ($q = 0$) imersate într-un mediu comun termic este descrisă în Sec. 4.2.

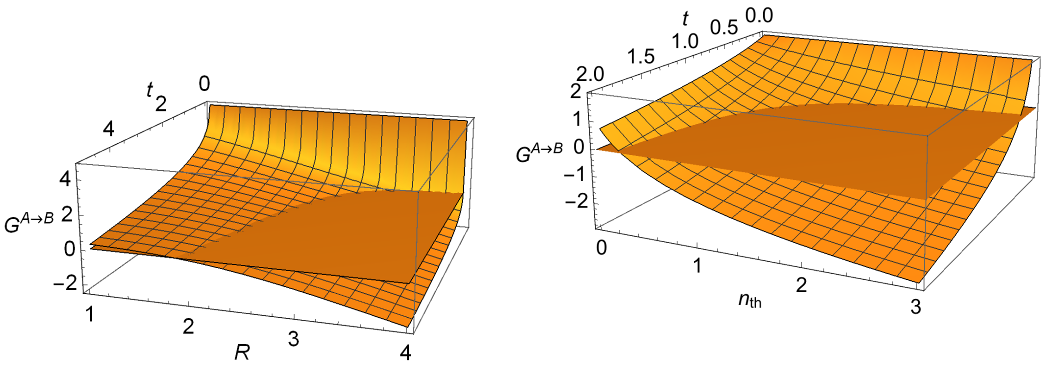
În Fig. 4.4 este reprezentată evoluția steeringului gaussian funcție de parametrul de comprimare a stării termice comprimate (4.15) cu numărul termic fotonic egal $n = n_1 = n_2 = 1$ în (b) și starea de vacuum $n = n_1 = n_2 = 0$ în (a), și frecvențele egale, astfel încât steeringul gaussian este simetric, $G^{A\to B} = G^{B\to A}$. După cum se vede, comportamentul steeringului în aceste două situații este similar, adică este distrus în timp finit, diferența constă doar în valorile inițiale ale steeringului. Stările termice comprimate sunt entanglate pentru $r > r_s$, unde $\cosh^2 r_s = (n_1+1)(n_2+1)/(n_1+n_2+1)$, și prin urmare, aceste stări nu au steering pentru $r < r_s$. Comprimarea stării mărește rezistența steeringului la procesele de decoerență și disipare.

În Fig. 4.5 (a) este ilustrată evoluția temporală a steeringului gaussian pentru




(a) (b)

FIGURE 4.4: [MI17] Steeringul cuantic gaussian $G^{A\to B}$ a două moduri bosonice rezonante $\omega = 1$ într-un mediu termic cu temperatura $C \equiv \coth(\omega/2k_BT) = 2$ și coeficientul de disipare $\lambda = 0.1$, funcție de timp $t$ și parametrul de comprimare $r$ pentru starea de vacuum comprimată inițială cu $n_1 = n_2 = 0$ (a), și pentru starea termică comprimată inițială cu $n_1 = n_2 = 1$ (b).




(a) (b)

FIGURE 4.5: [MI18] Evoluția steeringului cuantic gaussian $G^{A\to B}$ într-un canal cu zgomot cu faza de comprimare $\varphi = 0$ și coeficientul de disipare $\lambda = 0.1$, (a) în funcție de timp $t$ și parametrul de comprimare $R$ a băii termice comprimate cu numărul termic de fotoni $n_{th} = 0$, și comprimarea stării $r = 2$, și (b) în funcție de timp $t$ și numărul termic de fotoni $n_{th}$ al băii termice comprimate cu parametrul de comprimare $R = 0.5$, și comprimarea stării $r = 1$.

o stare de vacuum comprimată care interacționează cu un mediu termic comprimat. Pe lânga tendința generală de distrugere în timp a steeringului, mai există și o competiție între influența parametrului de comprimare din sistem și comprimarea mediului. Mai exact, se observă că steeringul este distrus mai rapid dacă comprimarea băii este mai mare decât comprimarea sistemului ($R > r$). Fig. 4.5 (b) arată evoluția temporală a steeringului gaussian pentru o stare de vacuum comprimată în funcție de numărul fotonic termic. Se observă că steeringul descrește monoton în timp cu o rată mai mare atunci când crește numărul termic al băii. În plus, steeringul gaussian este distrus în timp finit pentru orice valori diferite de zero a temperaturii băii. Totuși, pentru numărul termic zero al băii steeringul gaussian devine zero doar asimptotic, în limita de timp infinit. Într-adevăr, în acest caz particular expresia din ecuația (4.24) în limita de timp infinit devine

$$\frac{\det \gamma_A(\infty)}{4 \det \gamma(\infty)} = \frac{1}{4[(\frac{1}{2}+N)^2 - |M|^2]}, \tag{4.25}$$

și este $1$, și prin urmare, steeringul gaussian se păstrează în timp infinit, pe când în cazul general zgomotul termic și disiparea distrug steeringul dintre moduri în timp finit.

### 4.3.3 Generarea discordului gaussian

În Ref. [IM17] este studiată dinamica discordului cuantic gaussian al unui sistem compus din două moduri bosonice cuplate în interacție cu un mediu termic. Expresia discordului pentru o stare gaussiană de două moduri bosonice este dată de [AD10]:

$$\mathcal{D} = f(\sqrt{\det \gamma_B}) - f(\nu_-) - f(\nu_+) + f(\sqrt{\det \varepsilon}), \tag{4.26}$$

unde

$$f(x) = \frac{x+1}{2}\log_2\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2}\log_2\frac{x-1}{2}, \tag{4.27}$$

$\nu_\mp$ sunt valorile proprii simplectice ale matricii $\gamma$ (4.17), și

$$\det\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{2\delta^2 + (\beta-1)(\Gamma-\alpha) + 2|\delta|\sqrt{\delta^2 + (\beta-1)(\Gamma-\alpha)}}{(\beta-1)^2}, \\ \qquad \text{if } (\Gamma-\alpha\beta)^2 \leq (\beta+1)\delta^2(\alpha+\Gamma), \\ \dfrac{\alpha\beta - \delta^2 + \Gamma - \sqrt{\delta^4 + (\Gamma-\alpha\beta)^2 - 2\delta^2(\Gamma+\alpha\beta)}}{2\beta}, \\ \qquad \text{în caz contrar}, \end{cases} \tag{4.28}$$

unde folosim următoarele notații pentru invarianții simplectici ai matricii de covarianță $\gamma$:

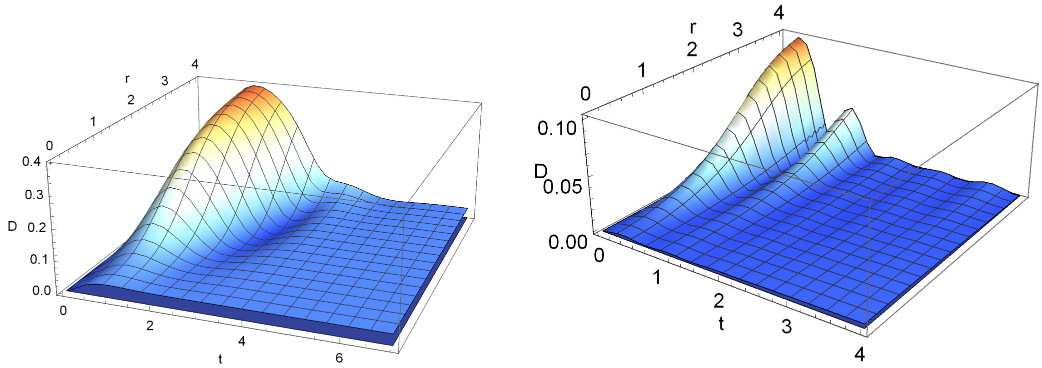
$$\alpha = \det\gamma_A, \qquad \beta = \det\gamma_B, \qquad \delta = \det\gamma_C, \qquad \Gamma = \det\gamma. \tag{4.29}$$

Datorită cuplajului diferit de zero dintre moduri se poate chiar crea discordul în ciuda procesului de disipare care are loc în timpul interației cu baia termică. Pentru a arăta aceasta considerăm o stare inițială în formă de produs, pentru care discordul este zero, cum este starea comprimată unimodală dată de următoarea matrice de covarianță:

$$\gamma(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cosh 2r & \sinh 2r & 0 & 0 \\ \sinh 2r & \cosh 2r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh 2r & \sinh 2r \\ 0 & 0 & \sinh 2r & \cosh 2r \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

cu parametrul de comprimare $r$.

În Fig. 4.6 este prezentată dinamica discordului gaussian $D$ în funcție de timp și parametrul de comprimare a stării inițiale comprimate unimodale. Pentru un cuplaj diferit de zero între moduri și temperatura zero a băii, aceste două grafice ilustrează generarea discordului în stări inițiale cu discord zero, imediat după începerea interacției cu baia. Se observă că discordul generat atinge o valoare maximă care este mai mare pentru cazul rezonant în comparație cu modurile bosonice nerezonante, după care descrește în timp nemonoton, tinzând către o valoare finită diferită de zero în limita asimptotică. Pe lângă aceasta, discordul creat are un comportament oscilant în timp, ceea ce este mai evident în cazul nerezonant. Acest fenomen de generare a discordului are loc pentru toate valorile diferite de zero ale parametrului

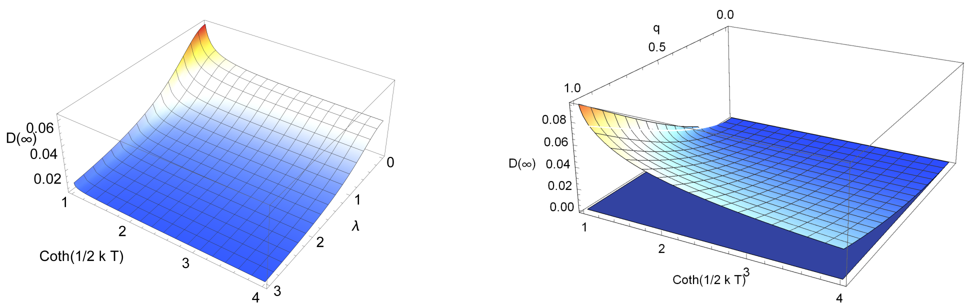



(a) (b)

FIGURE 4.6: [IM17] Discordul cuantic gaussian $D$ pentru o stare inițială comprimată unimodală a două moduri bosonice având cuplajul $q = 0.5$, într-o baie termică cu temperatura $T = 0$ $(\coth(\omega/2kT) = 1)$, și coeficientul de disipare $\lambda = 1$, în funcție de timp $t$ și parametrul de comprimare $r$. Fig. (a) este pentru moduri rezonante $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega = 1$, și (b) pentru moduri nerezonante cu $\omega_1 = 1$ și $\omega_2 = 4$.

de comprimare, cuplajului dintre moduri, temperaturii băii și coeficientului de disipare.

Datorită cuplajului dintre moduri matricea de covarianță asimptotică $\gamma(\infty)$ nu este o matrice de formă produs, și prin urmare, discordul gausian tinde către o valoare finită diferită de zero îm limita timpului infinit.




(a) (b)

FIGURE 4.7: [IM17] Discordul gaussian asimptotic $D(\infty)$ a două moduri bosonice rezonante cu $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega = 1$ în funcție de temperatură via $\coth(\omega/2kT)$ și de disipare $\lambda$ în (a), pentru cuplajul dintre moduri dat de parametrul $q = 0.5$, și în funcție de temperatură via $\coth(\omega/2kT)$ și de cuplajul dintre moduri $q$ în (b), pentru coeficientul de disipare $\lambda = 1$.

Starea asimptotică depinde de cuplajul dintre moduri, și de interacția sistemului cu mediul, iar informația despre starea inițială se pierde în limita timpului infinit. Dacă modurile nu sunt cuplate, i.e. $q = 0$, atunci matricea de covarianță asimptotică este o stare produs Gibbs, care definește echilibrul termic al celor două moduri cu baia termică, și pentru care discordul cuantic este zero. Acest lucru este ilustrat în Fig. 4.7, (a) și (b), unde este reprezentat discordul cuantic asimptotic.

### 4.3.4 Puterea interferometrică

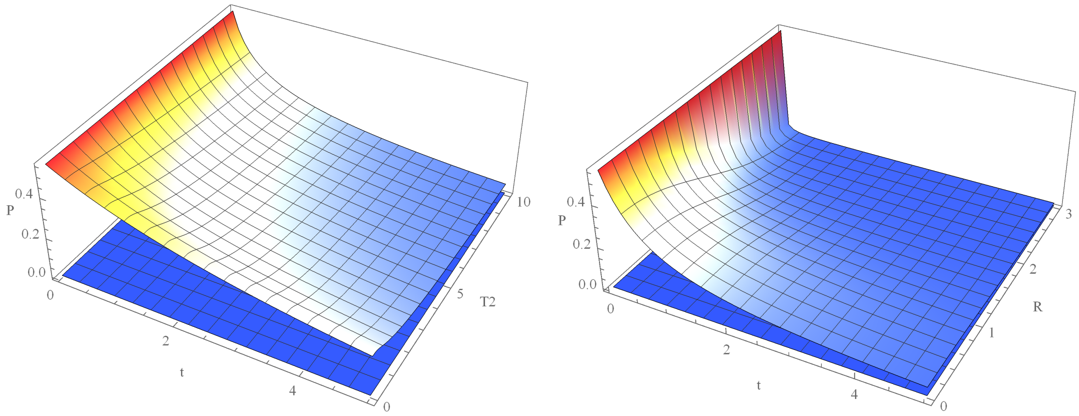
În Ref. [Mîr+20] se consideră o stare gaussiană de două moduri, unde fiecare dintre moduri interacționează cu o baie termică comprimată (Sec. 4.2). Chiar dacă nu există cuplaj între moduri, înterația cu două băi cu temperaturi diferite afectează puterea interferometrică (IP) $\mathcal{P}_G^A$ a stării gaussiene, dată de

$$\mathcal{P}_G^A(\gamma) = \frac{X + \sqrt{X^2 + YZ}}{2Y}, \tag{4.31}$$

unde

$$\begin{aligned} X &= (\alpha + \delta)(1 + \beta + \delta - \Gamma) - \Gamma^2, \\ Y &= (\Gamma - 1)(1 + \alpha + \beta + 2\delta + \Gamma), \\ Z &= (\alpha + \Gamma)(\alpha\beta - \Gamma) + \delta(2\alpha + \delta)(1 + \beta), \end{aligned}$$

iar invarianții simplectici ai matricii de covarianță $\gamma$ sunt dați de Ec. (4.29).




(A) $P(t, T_2)$ (B) $P(t, R)$

FIGURE 4.8: [Mîr+20] Puterea interferometrică gaussiană $P$ dependentă de timp $t$ și (a) temperatura $T_2$ celei de a doua băi (pentru $r = 0.5, R = 0.5, T_1 = 0.5, \varphi = 5, n_1 = n_2 = 0.5, \lambda = 0.1$) și (b) parametrul de comprimare a băilor $R$ (pentru $r = 0.5, T_1 = 1, T_2 = 10, \varphi = 5, n_1 = n_2 = 0.5, \lambda = 0.1$).

În Fig. 4.8 este ilustrată puterea interferometrică a unei stări inițiale bimodale termice comprimate, unde evoluția în timp globală indică o descreștere în timp a puterii interferometrice gausiene, care tinde la zero în limita de timp infinit. În Fig. (a) se consideră o valoare fixă a temperaturii pentru prima baie, și se observă că al doilea mediu cu timperaturile înalte contribuie la o distrugere mai rapidă a puterii interferometrice, și prin urmare, se alterează precizia de estimare a parametrului de fază asociat cu evoluția unitară a primului mod. Graficul (b) ilustrează evoluția temporală a puterii interferometrice gaussiene în funcție de comprimarea băilor, care în esență intensifică procesul de distrugere, în special pentru o comprimare a băii mai mare decât cea a sistemului.

# Concluzii

În această teză am abordat două probleme importante pentru știința informației cuantice. În primul rând, pentru o metodă eficientă și sigură de detectare a corelațiilor cuantice în stări cuantice generice, trebuie să investigăm dacă utilizarea resurselor practice necesare, de regulă cuantificate în termeni de numărul de măsurători realizate, este eficientă. În al doilea rând, conservarea corelațiilor cuantice în timpul experimentelor reprezintă o sarcină exigentă, din cauza influenței inevitabile a mediului asupra evoluției sistemelor cuantice. Aceste probleme au fost abordate în cazul stărilor gaussiene, care sunt des întâlnite în experimentele de optică cuantică.

În acest scop, am propus o metodă inovatoare pentru detectarea entanglementului și steeringului în stări gaussiene arbitrare, și am aplicat metoda pentru stări gaussiene aleatoare de două moduri, precum și pentru stări comprimate termice, stări GHZ de trei moduri și stări de patru moduri ce conțin bound entanglement. Un avantaj major al acestei metode este că se detectează entanglementul și steeringul în medie cu mai puține măsurători decât în tomografia totală [Mih+20] [Mih+23]. Acest rezultat este obținut prin intermediul unui algoritm semidefinit de optimizare unde se construiește operatorul test bazat pe datele experimentale aleatorii achiziționate incremental până în momentul când prezența entanglementului și a steeringului este confirmată. Ulterior, am testat această metodă pe un eșantion relativ mare de stări gaussiene aleatorii și am colectat informații suficiente pentru o analiză statistică semnificativă.

Stările gaussiene reprezintă un set de stări speciale pentru care relația dintre entanglement și steering este determinată exact. Ca rezultat, am reușit să caracterizăm în totalitate setul de teste bazate pe momente de ordinul doi pentru steering, și am arătat că el reprezintă un subset de teste pentru entanglement, în timp ce nu există o descriere analogă pentru stări cuantice generice.

Referitor la posibilele dezvoltări viitoare privind detectarea corelațiilor cuantice, un aspect important este dacă se pot defini clase de echivalență de teste echipate cu relații de echivalență, ce constau în transformări simplectice locale. Acest lucru poate aduce avantaje în detectarea corelațiilor cuantice odată ce este posibil să definim o formă mai simplă și echivalentă a unui test, astfel încât un număr mai mic de măsurători să fie necesar pentru ca algoritmul să găsească soluția optimă. În plus, determinarea unor constrângeri liniare mai adecvate pentru caracterizarea completă a testelor va îmbunătăți și mai mult eficiența detectării entanglementului și steeringului. Un alt studiu interesant l-ar constitui definirea unor teste care detectează doar stările gaussiene entanglate cu matricea parțial transpusă negativă, stări care sunt utile pentru protocolul de distilare a entanglementului. Progresul în această direcție ar contribui la înțelegerea aprofundată a structurii și proprietăților entanglementului și steeringului prezent în starea dată, ceea ce poate fi util pentru aplicațiile de procesare a informației cuantice.

Pentru a investiga dinamica corelațiilor cuantice în sistemele gaussiene, am folosit ecuația master Lindblad, care reprezintă cea mai generală forma de ecuație master markoviană ce descrie o evoluție complet pozitivă și care păstrează urma stării. Mecanismul principal care de regulă influențează evoluția sistemelor gaussiene, cum sunt modurile bosonice, este dat de zgomotul termic și disipare, care sunt modelate destul de precis dacă considerăm mediul ca fiind un rezervor în echilibru termic, i.e. o baie termică. Un mediu mai general este reprezentat de baia termică comprimată, în care fiecare mod bosonic prezintă o comprimare în incertitudini.

Datorită interacției cu mediul, entanglementul și steeringul cuantic în moduri bosonice necuplate sunt distruse în timp finit, un fenomen cunoscut ca "moarte subită" [MI17][MI18]. O resursă eficientă pentru conservarea corelațiilor cuantice pentru un timp mai lung este comprimarea cuantică. Similar, corelațiile de tip discord sunt mai rezistente la zgomot dacă comprimarea este mai puternică, și acestea se anulează asimptotic doar în limita de timp infinit [Mîr+20]. Mai mult decât atât, dacă adițional modurile bosonice ale sistemului studiat sunt cuplate, atunci discordul gaussian este chiar generat în stările inițiale fără corelații [IM17].

Cuplajul diferit de zero dintre moduri influențează puternic procesele dinamice subiacente prin intensificarea ireversibilității evoluției sistemului [MI22]. Noi am arătat că acest efect în cazul interației sistemului cu baia termică, pentru care am investigat evoluția ratei producției de entropie ca indicator al ireversibilității. Astfel, am arătat că rata producției de entropie ia doar valori pozitive, este mai mare pentru sistemul de moduri bosonice nerezonante, și se anulează doar atunci când sistemul ajunge în echilibru termic cu baia, pentru cuplaj zero dintre moduri.

Studiul evoluțiilor de neechilibru în medii arbitrare reprezintă un subiect provocator, datorită faptului că fluxul de informație și producția de entropie în stările considerate nu pot fi detectate direct în experimente. În continuarea aspectelor deja abordate, un subiect atrăgător pentru investigație îl constituie deducerea expresiei ratei producției de entropie pentru evoluția unui sistem de două moduri bosonice în interacție cu un mediu termic comprimat.

De asemenea, analiza prezentată privind dinamica corelațiilor cuantice și ireversibilitatea, se poate extinde dincolo de aproximația markoviană, dată de o evoluție ne-markoviană a sistemelor gaussiene în interacție cu o baie termică și o baie termică comprimată.

# Bibliografie

[AD10] Adesso, G. and Datta, A. "Quantum versus classical correlations in Gaussian states". In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (3 2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.030501.

[And03] Anders, J. *Estimating the degree of entanglement of unknown Gaussian states*. Diploma Thesis, University of Potsdam, 2003. DOI: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0610263.

[ASI04] Adesso, G., Serafini, A., and Illuminati, F. "Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems". In: *Phys. Rev. A* 70 (2 2004). DOI: 10.1103/PhysRevA.70.022318.

[ASI06] Adesso, G., Serafini, A., and Illuminati, F. "Three-mode Gaussian states in quantum information with continuous variables". In: (2006). DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0609071.

[BL05] Braunstein, S. L. and Loock, P. van. "Quantum information with continuous variables". In: *Rev. Mod. Phys.* 77 (2 2005). DOI: 10.1103/RevModPhys.77.513.

[BP02] Breuer, H. P. and Petruccione, F. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press, 2002.

[BP16] Brunelli, M. and Paternostro, M. "Irreversibility and correlations in coupled quantum oscillators". In: (2016). DOI: https://arxiv.org/abs/1610.01172.

[Bru+14] Brunner, N., Cavalcanti, D., Pironio, S., Scarani, V., and Wehner, S. "Bell nonlocality". In: *Rev. Mod. Phys.* 86 (2 2014), pp. 419–478. DOI: 10.1103/RevModPhys.86.419.

[BV04] Boyd, S. and Vandenberghe, L. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[D'A+05] D'Auria, V., Porzio, A., Solimeno, S., Olivares, S., and Paris, M. G. A. "Characterization of bipartite states using a single homodyne detector". In: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 7.12 (2005). DOI: 10.1088/1464-4266/7/12/044.

[EPR35] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" In: *Phys. Rev.* 47 (10 1935). DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.

[GKS76] Gorini, V., Kossakowski, A., and Sudarshan, E. C. G. "Completely positive dynamical semigroups of N level systems". In: *J. Math. Phys.* 17 (1976). DOI: 10.1063/1.522979.

[GM61] Groot, S. R. D. and Mazur, P. *Non-equilibrium Thermodynamics*. North-Holland Physics Publishing: Amsterdam, 1961.

[HE06] Hyllus, P. and Eisert, J. "Optimal entanglement witnesses for continuous-variable systems". In: *New Journal of Physics* 8.4 (2006). DOI: 10.1088/1367-2630/8/4/051.

[Hor+09] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., and Horodecki, K. "Quantum entanglement". In: *Rev. Mod. Phys.* 81 (2 2009). DOI: 10.1103/RevModPhys.81.865.

[IM17] Isar, A. and Mihaescu, T. "Generation of quantum discord in two-mode Gaussian systems in a thermal reservoir". In: *The European Physical Journal D* 71.6 (2017). ISSN: 1434-6079. DOI: 10.1140/epjd/e2017-80011-4.

[Isa+94] Isar, A., Sandulescu, A., Scutaru, H., Stefanescu, E., and Scheid, W. “Open quantum systems”. In: *International Journal of Modern Physics E* 03.02 (1994). DOI: 10.1142/s0218301394000164.

[Kog+15] Kogias, I., Lee, A. R., Ragy, S., and Adesso, G. “Quantification of Gaussian quantum steering”. In: *Phys. Rev. Lett.* 114 (6 2015). DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.060403.

[LB00] Loock, P. van and Braunstein, S. L. “Multipartite Entanglement for Continuous Variables: A Quantum Teleportation Network”. In: *Phys. Rev. Lett.* 84.3482 (2000).

[LB01] Loock, P. van and Braunstein, S. L. “Greenberger-Horne-Zeilinger nonlocality in phase space”. In: *Phys. Rev. A* 63.022106 (2001).

[Lin76] Lindblad, G. “On the generators of quantum dynamical semigroups”. In: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976). ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/BF01608499.

[MI17] Mihaescu, T. and Isar, A. “Gaussian Quantum Steering of Two Bosonic Modes in a Thermal Environment”. In: *Romanian Journal of Physics* 62.107 (2017).

[MI18] Mihaescu, T. and Isar, A. “Evolution of quantum steering in a Gaussian noisy channel”. In: *The European Physical Journal D* 72.6 (2018). ISSN: 1434-6079. DOI: 10.1140/epjd/e2018-90068-0.

[MI22] Mihaescu, T. and Isar, A. “Dynamics of Entropy Production Rate in Two Coupled Bosonic Modes Interacting with a Thermal Reservoir”. In: *Entropy* 24.5 (2022). ISSN: 1099-4300. DOI: 10.3390/e24050696. URL: https://www.mdpi.com/1099-4300/24/5/696.

[Mih+20] Mihaescu, T., Kampermann, H., Gianfelici, G., Isar, A., and Bruß, D. “Detecting entanglement of unknown continuous variable states with random measurements”. In: *New Journal of Physics* 22.12 (2020). DOI: 10.1088/1367-2630/abd1ad.

[Mih+23] Mihaescu, T., Kampermann, H., Bruß, D., and Isar, A. “Steering witnesses for unknown Gaussian quantum states”. In: (2023). URL: https://arxiv.org/abs/2304.11239.

[Mîr+20] Mîrzac, A., Mihaescu, T., Macovei, M., and Isar, A. “Interferometric power of Gaussian systems in a squeezed thermal bath”. In: *Romanian Journal of Physics* 65.102 (2020).

[Mod+11] Modi, K., Cable, H., Williamson, M., and Vedral, V. “Quantum Correlations in Mixed-State Metrology”. In: *Phys. Rev. X* 1 (2 2011), p. 021022. DOI: 10.1103/PhysRevX.1.021022.

[OZ01] Ollivier, H. and Zurek, W. H. “Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations”. In: *Phys. Rev. Lett.* 88 (1 2001). DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.017901.

[Ser17] Serafini, A. *Quantum continuous variables: A primer of theoretical methods*. Taylor and Francis Group, 2017.

[SF12] Spinney, Richard E. and Ford, Ian J. “Entropy production in full phase space for continuous stochastic dynamics”. In: *Phys. Rev. E* 85 (5 2012), p. 051113. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.051113.

[SLP17] Santos, J. P., Landi, G. T., and Paternostro, M. “Wigner Entropy Production Rate”. In: *Phys. Rev. Lett.* 118 (22 2017), p. 220601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.220601.

[Uol+20] Uola, R., Costa, A. C. S., Nguyen, H. C., and Gühne, O. “Quantum steering”. In: *Rev. Mod. Phys.* 92 (1 2020). DOI: 10.1103/RevModPhys.92.015001.

[VB96] Vandenberghe, L. and Boyd, S. “Semidefinite programming”. In: *SIAM Review* 38.1 (1996). DOI: 10.1137/1038003.

[Wee+12] Weedbrook, C. et al. “Gaussian quantum information”. In: *Rev. Mod. Phys.* 84 (2 2012). DOI: 10.1103/RevModPhys.84.621.

[Wil17] Wilde, M.M. *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2017.

[Wil36] Williamson, J. “On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems”. In: *American Journal of Mathematics* 58 (1936).

[WW01] Werner, R. F. and Wolf, M. M. “Bound entangled Gaussian states”. In: *Phys. Rev. Lett.* 86 (16 2001). DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.3658.